

問題1 (配点 40 点)

- (1) $f'(x) = 2x + 2A$ であるから、 $f(x)$ の $x = 1$ における接線の傾きは $f'(1) = 2 + 2A$ である。よって、 $f'(1) > 0$ となる条件は $A > -1$ であるから、その確率は $\frac{4}{7}$ である。
 //

- (2) $f(x) = (x + A)^2 - A^2 + B$ より、 $f(x)$ の頂点の y 座標は $-A^2 + B$ である。 $-A^2 + B > 0$ となる A と B の組み合わせは

- $A = 0$ かつ $B = 1, 2, 3$;
- $A = \pm 1$ かつ $B = 2, 3$

である。よって、求める確率は、

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$$

である。//

- (3) $\int_0^1 f(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} + Ax^2 + Bx \right]_0^1 = \frac{1}{3} + A + B$ である。よって、 $A < \int_0^1 f(x) dx < 0$ となる条件は $A < \frac{1}{3} + A + B < 0$ 、即ち、 $B > -\frac{1}{3}$ かつ $A < -B - \frac{1}{3}$ である。条件をみたす A と B の組み合わせは

- $B = 0$ かつ $A = -3, -2, -1$;
- $B = 1$ かつ $A = -3, -2$;
- $B = 2$ かつ $A = -3$

である。よって、求める確率は

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{3+2+1}{7} = \frac{6}{49}$$

である。//

採点欄 (1)		採点欄 (2)		採点欄 (3)		得点欄	
------------	--	------------	--	------------	--	-----	--

問題2 (配点 40 点)

- (1) $s^2 \log s = 0$ かつ $s > 0$ であるから $\log s = 0$ である。よって $s = 1$ である。//
- (2) $f'(x) = 2x \log x + x = x(2 \log x + 1) = 0, x > 0$ を解くと $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ である。ここから、増減表は次のようになる。

x	0	...	$1/\sqrt{e}$...
$f'(x)$	\	-	0	+
$f(x)$	\	\	$-1/(2e)$	↗

増減表より、 $f(x)$ は $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ で極小値をとる。ゆえに、 $t = \frac{1}{\sqrt{e}}$ である。//

- (3) (1), (2) より、 $f(x) \leq 0 \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \leq x \leq 1 \right)$ であるから、

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^1 (-x^2 \log x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} \log x \right]_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^1 + \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^1 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= -\frac{1}{6e\sqrt{e}} + \left[\frac{x^3}{9} \right]_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^1 \\
 &= -\frac{1}{6e\sqrt{e}} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9e\sqrt{e}} \\
 &= \frac{1}{9} - \frac{5}{18e\sqrt{e}}
 \end{aligned}$$

である。//

採点欄		採点欄		採点欄		得点欄	
(1)		(2)		(3)			

問題3 (配点 40 点)

- (1) OB と AC がそれぞれの中点で交わるので、 $\frac{\alpha^2}{2} = \frac{\alpha^3 + \alpha}{2}$ 、即ち、 $\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha = 0$ である。これを解くと、 $\alpha = 0, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ である。条件より α の実部および虚部は正であるから、 $\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ である。 //
- (2) 前問より、 $\alpha = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ である。ド・モアブルの定理より、 $\alpha^3 = \cos \pi + i \sin \pi$ である。ゆえに、 α の偏角は $\frac{\pi}{3}$ 、 α^3 の偏角は π であるから、 $\angle AOC = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ である。 //
- (3) $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r > 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) と表す。ド・モアブルの定理より、 $\alpha^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$ であるから、 α の偏角は θ 、 α^2 の偏角は 2θ である。よって、 $\angle AOB = 2\theta - \theta = \theta < \frac{\pi}{2}$ である。ゆえに、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ となる。 $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$ のときは、 $\sqrt{2}r = r^2$ であるから、 $r = \sqrt{2}$ である。よって、 $\alpha = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 1 + i$ である。 $\angle OBA = \frac{\pi}{2}$ のときは、 $r = \sqrt{2}r^2$ であるから、 $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。ゆえに、 $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1+i}{2}$ である。以上により、 $\alpha = 1 + i, \frac{1+i}{2}$ である。 //

採点欄		採点欄		採点欄		得点欄	
(1)		(2)		(3)			

問題 4 (配点 30 点)

(1) $\{f(x)\}^2 = \frac{4-x^2}{4}$ であるから,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \left(\frac{4-x^2}{4} \right) dx = \frac{\pi}{4} \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{8\sqrt{3}}{3} - \frac{8\sqrt{3}}{27} \right) \\ &= \frac{16\sqrt{3}}{27} \pi \end{aligned}$$

である。//

(2) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{2\sqrt{4-x^2}}$ である。//

(3) 前問より

$$f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \sqrt{1+\frac{x^2}{4(4-x^2)}} = \frac{1}{2} \sqrt{4-\frac{3x^2}{4}} = \frac{1}{4} \sqrt{16-3x^2}$$

であるから, (与式) $= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \sqrt{16-3x^2} dx$ である。ここで, $\frac{\sqrt{3}}{4}x = \sin \theta$ とおくと, 置換積分公式および 2 倍角の公式により,

$$\begin{aligned} \text{(与式)} &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \frac{4}{\sqrt{3}} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。//

採点欄		採点欄		採点欄		得点欄	
(1)		(2)		(3)			